数理解析研究所講究録
244巻 1975年 78-89

平面ポアズイユ乱流の数値実験と二，三の考察

名大 工学部 桑原真二

§1. まえがき

Reynolds以来，乱流について非常に多くの研究がなされてきた。Taylor, Kolmogorov等の成功によって，一様，等方性乱流に多くの努力がはらわれた。最近では他の物理の分野との交流もさかんで，たとえば，場の量子論や統計物理学でもちいられるグリーン関数の方法等の手法がもちいられるようになった[1]。

今日，"乱流"を明確に定義することはむずかしいように思われる。しかし，ほとんどすべての流体力学者が乱流とみとめる流れがある。たとえば，臨界レイノルズ数を十分こえた状態における，管内の流れ，境界層の流れ，にぶい物体の伴流等がそれである。さて，このような"乱れた"流れの特徴は何であろうか。まず，現象を特徴ずけるパラメターが非常に多いことである。たとえば，速度場を振動数あるいは波数分析すれば，非常に多くの振動数，波数をう

るであろう。いわば，時間的にも，空間的にも非常に多くの特徴的時間および長さが存在することになる。

一方，どんな乱流でもはじめは層流であり，層流を経過して，乱流状態に遷移する。それ故，遷移の機構は乱流を理解する上で非常に重要である。実際，平行流について考えてみると，撹乱をフーリエ成分にわけて表わしうるとすると，はじめはある一つのフーリエ成分が選択的に成長し，ついで，フーリエ成分間の相互作用によって，多くの成分を励起し，ついに連続スペクトルまで成長する。

又，十分発達した定常乱流は，一種の統計的，力学的平衡状態にあると考えられる。エネルギー的にみれば，外からのエネルギーの供給（管流では圧力勾配，境界層流，にぶい物体の伴流では，物体にくわわるみカ）によって，多くの撹乱の成分（モード）が励起し，モード間の相互作用によって更に小さいモードにエネルギーがうつり，最後は粘性の散逸作用によって，熱になってしまう。そして，この一連の過程が，外部パラメター（圧力勾配等）に対応してきまる一種の統計的平衡状態にあると考えられる。

以上の考察から，乱流を次のように特徴ずけることができる。

① 乱流は非常に多くのパラメター（$\overset{\text{または}}{\text{モード}}$）をもっている。

② 外部パラメターの値に対応して，ある統計的平衡状態に近接する傾向をもっており，定常乱流は，そのような平衡に到達した状態と考えられる。

§2. 流れの記述と基礎方程式

ここでは，平面ポアズイユ乱流を考察する。物理的には，層流のポアズイユが存在しているとし，それに初期攪乱を与えたときに，どのようにして統計的平衡に到達するかを考察する。時間の経過とともに，流れはいろいろの状態をへめぐるであろうが，（平均的）圧力勾配は一定に保っておくものとする。そこで，単位時間に断面を通過する流量は，一般に一定でなく，時間的に変化する。実際の流れでは，十分長いが有限のダクトの両端の圧力差を一定に保っておくことに対応している。それ故，レイノルズ数を平均流量としての速度に基づいてつくると，時間的に変化することになり，不便なので，圧力勾配に対応する層流の最大流速をその基準にとることにする。

乱流の速度場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$，圧力場 $p(\boldsymbol{x},t)$ は Navier-Stokes 方程式にしたがうものとする。

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot \operatorname{grad})\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \nu \Delta \boldsymbol{v} \qquad (2.2)$$

ここでνは動粘性率である。まず

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \qquad p = \bar{p} + \tilde{p} \qquad (2.3)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}(y), 0, 0)\ ; \quad \bar{p} = -\alpha x\ , \quad \alpha = \mathrm{const.} \qquad (2.4)$$

と分解し，$\bar{u}$，$\bar{p}$として層流解をとる：

$$\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} = -\frac{\alpha}{\rho\nu}. \qquad (2.5)$$

上にのべたような物理的状況では，圧力変動 $\tilde{p}$ は平均的に0と考えられるが，速度変動 $\tilde{\mathbf{u}}$ 等の平均値は一般に0とならない。実際，レイノルズ応力による基本流へのフィード・バックを考慮すると(2.5)は

$$\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} = -\frac{\alpha}{\rho\nu} + \frac{1}{\nu}\langle(\tilde{\mathbf{u}}\cdot\mathrm{grad})\,\tilde{u}\rangle \qquad (2.6)$$

と書きかえなければならない。ここで，〈 〉は統計的平均をあらわす。それ故，レイノルズ応力によるフィードバックは$\bar{u}$の中にふくまれているから，$\bar{u}$の中には全流量の変化に対応するゆっくりと変化する成分をふくんでいる。

壁の位置を$y=0,\ a$と考え，境界条件

$$\bar{u} = 0\ , \qquad y = 0, a$$

のもとに，(2.5)を解くと

$$\frac{\bar{u}}{U} = 4\frac{y}{a}\left(1-\frac{y}{a}\right), \qquad U = \frac{\alpha a^2}{8a\nu} \qquad (2.7)$$

をうる。ここでUは層流平面ポアズイユ流の最大速度である。(2.3)を(2.2)に代入し，更に

$$Ut/a \to t, \quad \mathbf{x}/a \to \mathbf{x}, \quad \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}/U \to \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}},$$

$$p/\rho U^2 \longrightarrow p$$

の無次元化を行うと，変動成分に対する方程式をうる：

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + (\bar{u}\cdot \mathrm{grad})\,\tilde{u} + (\tilde{u}\cdot \mathrm{grad})\,\bar{u} + (\tilde{u}\cdot \mathrm{grad})\,\tilde{u} = -\mathrm{grad}\,\tilde{p} + \frac{1}{R}\Delta \tilde{u}. \qquad (2.8)$$

(2.7) は無次元化すると

$$\bar{u} = 4y(1-y) \qquad (2.9)$$

となる。レイノルズ数は

$$R = \frac{Ua}{\nu} \qquad (2.10)$$

で定義される。

更に，数学的簡単さのために，次の仮定をおく。

i) 攪乱は2次元である。

ii) x方向に周期的境界条件をもつ。

i) の仮定は，解析をすゝめる次の段階ではのぞかれるであろう。ii) については，こゝでは周期2をとるが，これの値を大きくとると，近似をよくすることができる。

さて，流れの場を完備な正規直交関数系で展開することを考えよう。上の仮定を考慮して，正規直交関数系に次の条件を課する：

$$(\mathbf{w}_{lm}, \mathbf{w}_{np}) \equiv \int_0^1 \int_{-1}^1 \mathbf{w}_{lm}(\mathbf{x})^* \, \mathbf{w}_{np}(\mathbf{x})\, dx\, dy = \delta_{ln}\,\delta_{mp} \qquad (2.11)$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{w}_{lm} = 0 \qquad (2.12)$$

$$\mathbf{w}_{lm} = 0 \quad \text{固定壁において} \qquad (2.13)$$

$$w_{lm}:\ \text{周期境界条件を満足する} \qquad (2\cdot14)$$

ここで * は共役複素数を，l, m は可能なすべての値をとるものとする。そこで

$$\tilde{u}(\mathbf{x},t)=\sum_{l,m} a_{lm}(t)\, w_{lm}(\mathbf{x}) \qquad (2\cdot15)$$

のように展開可能と仮定する。

(2·11)～(2·14) を満足する直交関数系をつくるために，

$$u_{lm}(\mathbf{x})=\frac{\partial\psi_{lm}}{\partial y},\quad v_{lm}(\mathbf{x})=-\frac{\partial\psi_{lm}}{\partial x} \qquad (2\cdot16)$$

$$\psi_{lm}(\mathbf{x})=\varphi_l(x)\, f_{lm}(y) \qquad (2\cdot17)$$

$$\varphi_l(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi l x} \qquad (2\cdot18)$$

とおけば，(2·12)，(2·14) の条件は満足される。ここで $\varphi_l(x)$ は正規直交条件：

$$(\varphi_l,\varphi_m)\equiv\int_{-1}^{1}\varphi_l(x)^{*}\varphi_m(x)\,dx=\delta_{lm} \qquad (2\cdot19)$$

を満足している。(2·16)～(2·18) から

$$u_{lm}=\varphi_l(x)\, f'_{lm}(y),\quad v_{lm}=-\pi i l\,\varphi_l(x)\, f_{lm}(y) \qquad (2\cdot20)$$

をうる。そこで，(2·13) の境界条件は

$$f_{lm}(y)=f'_{lm}(y)=0 \qquad y=0,1\ \ (l\neq0) \qquad (2\cdot21)$$

となる。$l=0$ のばあいには，(2·13) 以外の条件から，境界条件をきめなければならない。(2·16)，(2·18) から

$$u_{0m}=\frac{1}{\sqrt{2}}f'_{0m}(y),\quad v_{0m}=0 \qquad (2\cdot22)$$

となり，このばあいには平行流となる。

さて，(2.8) 式の x-成分は，境界条件 $\bar{u}=\tilde{u}=0$ ($y=0$, 1) のため，$y=0, 1$ において

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial y^2} = R\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x} \qquad (2.23)$$

となる。また，$\tilde{p}$ は周期条件を満足するから

$$\tilde{p}(-1, y) = \tilde{p}(1, y) \qquad y=0, 1 \qquad (2.24)$$

である。(2.23) を x について -1 から $+1$ まで積分して

$$\int_{-1}^{1}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial y^2}dx = R[\tilde{p}(+1, y)-\tilde{p}(-1, y)]=0 \qquad y=0, 1 \qquad (2.25)$$

をうる。各 $\tilde{u}_{lm}$ について考えれば

$$\int_{-1}^{1}\frac{\partial^2\tilde{u}_{lm}}{\partial y^2}dx = \left\{\begin{array}{ll}\sqrt{2}f_{lm}''' & l=0 \\ 0 & l\neq 0\end{array}\right\} y=0, 1 \qquad (2.26)$$

となる。そこで，$l\neq 0$ のばあいは $\tilde{u}_{lm}$ の各々が (2.25) を満足している。それ故，$l=0$ ばあいもこの条件を満足するとすれば f_{0m} の境界条件として

$$f_{lm}' = f_{lm}''' = 0, \qquad y=0, 1, \quad l=0 \qquad (2.27)$$

をうる。

φ_l の正規直交条件 (2.19) を考慮すると，Ψ_{lm}, Ψ_{np} は $l\neq n$ ならば，直交している。そこで正規直交条件 (2.11) は

$$(\Psi_{lm}, \Psi_{ln}) = (f_{lm}', f_{ln}') + \pi^2 l^2 (f_{lm}, f_{ln}) = \delta_{mn} \qquad (2.28)$$

となる。

そこで，正規直交関数系をつくるためには，(2.28)(l=0) または (2.21)(l≠0) の境界条件と正規直交条件 (2.28) を満足するように f_{lm} を決定すればよい。まず

$$\hat{f}_m(y) = \begin{cases} -\cos m\pi y & l=0 \\ \cos m\pi y - \cos(m+2)\pi y & l\neq 0 \end{cases} \qquad (2.29)$$

とおけば (2.28) または (2.21) の境界条件をおのおの満足している。そして，これらの一次結合によって (2.28) を満足するような直交関数系をつくることができる。

さて，$l=0$ のばあい，(2.29) の $\hat{f}_m$ は互いに直交しているから，正規化だけ実行すればよい。$l\neq 0$ のばあいには，m の偶数と，奇数の $\hat{f}_m$ は互いに直交しているから，$\{v_{l2m}\}$，$\{v_{l2m+1}\}$ の各々で正規直交化を行えばよい。Schmidt の方法によって正規直交化を行えば，結局

$$\left.\begin{aligned} v_{l2m} &= C^m_{lm}\,\hat{v}_{l2m} + \sum_{n=0}^{m-1} C^n_{lm}\, v_{l2n} = \sum_{n=0}^{m} \hat{C}^n_{lm}\,\hat{v}_{l2n} \\ v_{l2m+1} &= D^m_{lm}\,\hat{v}_{l2m+1} + \sum_{n=0}^{m-1} D^n_{lm}\, v_{l2n+1} = \sum_{n=0}^{m} D^n_{lm}\,\hat{v}_{l2n+1} \\ \hat{v}_{lm} &= \varphi_l(x)\,(\hat{f}'_m(y),\, -\pi i\,\hat{f}_m(y)) \end{aligned}\right\} \qquad (2.30)$$

$$\left.\begin{aligned} C^m_{lm} &= \{V_{lmm} - (V_{lmm-1}\, C^{m-1}_{lm-1})^2\}^{-\frac{1}{2}} \\ C^{m-1}_{lm} &= -V_{lmm-1}\, C^{m-1}_{lm-1}\, C^m_{lm} \\ C^n_{lm} &= 0 \qquad n=0,\cdots,m-2 \end{aligned}\right\} \qquad (2.31)$$

$$\left.\begin{aligned}
D_{lm}^{m} &= \left\{V_{lmm} - \left(V_{lmm-1}\, D_{lm-1}^{m-1}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} \\
D_{lm}^{m-1} &= -V_{lmm-1}\, D_{lm}^{m} \\
D_{lm}^{n} &= 0 \qquad n=0,\cdots,m-2
\end{aligned}\right\} \quad (2.32)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{C}_{lm}^{m} = C_{lm}^{m}\ ;\ \hat{C}_{lm}^{n} = C_{lm}^{m-1}\, C_{lm-1}^{n} \quad n=0,\cdots,m-1 \\
&\hat{D}_{lm}^{m} = D_{lm}^{m}\ ;\ \hat{D}_{lm}^{n} = D_{lm}^{m-1}\, D_{lm-1}^{n} \quad n=0,\cdots,m-1 \\
&V_{lmn} = (\hat{v}_{l2m}, \hat{v}_{2n}),\quad V_{lmn} = (\hat{v}_{l2m+1}, \hat{v}_{l2n+1})
\end{aligned}\right\} \quad (2.33)$$

となる。

上のようにしてつくった正規直交関数系が L_2 の意味で完備であることを証明することは容易である。速度は流れの関数 Ψ_{lm} ~~によって~~ から，(2.16) によってつくられ，Ψ_{lm} は $e^{il\pi x}\cos m\pi y$ $(l=0,\pm1,\cdots;\ m=0,1,2\cdots)$ のすべての組合せによってつくられている。一方 $\{e^{i\pi lx}\}$ および $\{\cos m\pi y\}$ は x の領域 $[-1,1]$ および y の領域 $[0,1]$ において，各々完備であり，したがって，それらの積によってつくられる関数系は (x,y) の領域 $[-1,1]\times[0,1]$ において完備であるからである。

上の $\bar{u}$ の展開 (2.15) を (2.8) に代入し，それと v_{lm} との内積をとることによって，偏微分方程式は無限連立の常微分方程式に変換することができる：

$$\dot{a}_{lm} = -\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty} A_{lm}^{n}\, a_{ln} + \sum_{n=0}^{\infty} S_{lm}^{n}\, a_{ln} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} A_{lm}^{npr} \times$$

$$\times\, a_{np}\, a_{l-nr} \qquad l=0,\pm1,\cdots,\ m=0,1,\cdots \qquad (2.34)$$

$$
\left.\begin{aligned}
A_{lm}^{n} &= -(w_{lm},\ \nu \Delta w_{ln}) \\
S_{lm}^{n} &= -(w_{lm},\ (\bar{u}\cdot \mathrm{grad})\, w_{ln}) - (w_{lm},\ (w_{ln}\cdot \mathrm{grad})\, \bar{u}) \\
A_{lm}^{npr} &= (w_{lm},\ (w_{l-nr}\cdot \mathrm{grad})\, w_{np})
\end{aligned}\right\} \quad (2.35)
$$

この基礎方程式は乱流の状態を $\{a_{lm}\}$ によってはられる空間，すなわちヒルベルト空間 $l_2 = \{\{a_{lm}\} \mid \sum |a_{lm}|^2 < \infty\}$ の上での運動として記述するものである。

§3. むすび

前節で，乱流の状態をヒルベルト空間 l_2 の中の運動として記述した。もし，このヒルベルト空間に確率分布関数を導入すれば，確率過程論として定式化できる。

ここでは，無限次元の空間を有限次元（$|l|<L$，$0 \leq m < M$）で近似できるものとする。すなわち

$$
\sum_{l=-L}^{L} \sum_{m=0}^{M} |a_{lm}|^2 \gg \left(\sum_{l=-\infty}^{-L-1} + \sum_{l=L+1}^{\infty} \right) \sum_{m=0}^{M} |a_{lm}|^2 + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=M+1}^{\infty} |a_{lm}| \qquad (3.1)
$$

が成り立つと考える。そこで，$(2L+1)\times(M+1)$ 次元のベクトルの常微分方程式の初期値問題を考える。

微分方程式の係数の0になるものが多いので，a_{lm} の m の奇偶によって分けてあつかう方がずっと便利である。そこで

$$\left.\begin{aligned}
&A_{lm} = a_{l\,2m} \qquad m = 0, \cdots, MA \\
&B_{lm} = a_{l\,2m+1} \quad m = 0, \cdots, MB\ (= MA \text{ or } MA-1) \\
&\quad l = -L, \cdots, L
\end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

とおけば，基礎方程式 (2・34) は

$$\left.\begin{aligned}
\dot{A}_{lm} = {} & \sum_{p=0}^{MA} \left(-\frac{1}{R} CAA_{lm}^{p} + i\, CSA_{lm}^{p} \right) A_{lp} \\
& - i \sum_{n=l-L}^{L} \Big(\sum_{p=0}^{MA} \sum_{q=0}^{MB} CAAB_{lm}^{npq} A_{np} B_{l-n\,q} \\
& \qquad + \sum_{p=0}^{MB} \sum_{q=0}^{MA} CABA_{lm}^{npq} B_{np} A_{l-n\,q} \Big) \\
\dot{B}_{lm} = {} & \sum_{p=0}^{MB} \left(-\frac{1}{R} CBB_{lm}^{p} + i\, CSB_{lm}^{p} \right) B_{lp} \\
& - i \sum_{n=l-L}^{L} \Big(\sum_{p=0}^{MA} \sum_{q=0}^{MA} CBAA_{lm}^{npq} A_{np} A_{l-n\,q} \\
& \qquad + \sum_{p=0}^{MB} \sum_{q=0}^{MB} CBBB_{lm}^{npq} B_{np} B_{l-n\,q} \Big)
\end{aligned}\right\} \quad (3.3)$$

$$\left.\begin{aligned}
& CAA_{lm}^{n} = A_{l\,2m}^{2n} \ ; \quad CBB_{lm}^{n} = A_{l\,2m+1}^{2n+1} \\
& CSA_{lm}^{n} = \frac{1}{i} S_{l\,2m}^{2n} \ ; \quad CSB_{lm}^{n} = \frac{1}{i} S_{l\,2m+1}^{2n+1} \\
& CAAB_{lm}^{npq} = \frac{1}{i} A_{l\,2m}^{n\,2p\,2q+1} \\
& CABA_{lm}^{npq} = \frac{1}{i} A_{l\,2m}^{n\,2p+1\,2q} \\
& CBAA_{lm}^{npq} = \frac{1}{i} A_{l\,2m+1}^{n\,2p\,2q} \\
& CBBB_{lm}^{npq} = \frac{1}{i} A_{l\,2m+1}^{n\,2p+1\,2q+1}
\end{aligned}\right\} \quad (3.3)$$

となる。ちなみに，A_{lm}，B_{lm} は複素変数であり，CAA

等は実係数である。

実際，$R=20,000$ について i) $l=0,\pm1,\pm2$; $m=0,1$ （9モード），ii) $l=0,\pm1,\pm2,\pm3$, $m=0,1,2$, (20モード），iii) $l=0,\pm1,\cdots\pm4$, $m=0,\cdots,3$ （35モード）のベクトルについて，初期値問題（初期値として a_{10} と a_{11} だけに小さい値を与え，他は0とする）を解いた。その結果，§1にのべた乱流の特徴，すなわち，多くのモードが除々に励起され，ある統計的平衡状態に向う傾向を示した。くわしい計算結果は他の機会に行う。

参考文献：

1) D.C. Leslie: Developments in the theory of turbulence, Clarendon Press, Oxford 1984.

2) 宇厚真二：非等方，非一様な乱流はいかにしてあつかうか ―― 平面ポアズイユ乱流の数値実験に関連して 第6回乱流シンポジウム，京大宇宙研 (1974) 151

3) 宇厚真二：非一様，非等方な乱流の非線形力学，京大工学部紀要 A (1974) 42

4) 宇厚真二：一般化 Burgers 方程式と平面 Poiseuille 流の数値実験，数理研講究録 218 (1974) 128.